Chapitre I

Compléments d’algèbre : les polynômes

$0 \cdot x^1$	$0 \cdot x^2$	$0 \cdot x^3$	$0 \cdot x^4$	$0 \cdot x^5$	$0 \cdot x^6$
$1 \cdot x^1$	$1 \cdot x^2$	$1 \cdot x^3$	$1 \cdot x^4$	$1 \cdot x^5$	$1 \cdot x^6$
$2 \cdot x^1$	$2 \cdot x^2$	$2 \cdot x^3$	$2 \cdot x^4$	$2 \cdot x^5$	$2 \cdot x^6$
$3 \cdot x^1$	$3 \cdot x^2$	$3 \cdot x^3$	$3 \cdot x^4$	$3 \cdot x^5$	$3 \cdot x^6$
$4 \cdot x^1$	$4 \cdot x^2$	$4 \cdot x^3$	$4 \cdot x^4$	$4 \cdot x^5$	$4 \cdot x^6$
$5 \cdot x^1$	$5 \cdot x^2$	$5 \cdot x^3$	$5 \cdot x^4$	$5 \cdot x^5$	$5 \cdot x^6$
$6 \cdot x^1$	$6 \cdot x^2$	$6 \cdot x^3$	$6 \cdot x^4$	$6 \cdot x^5$	$6 \cdot x^6$
$7 \cdot x^1$	$7 \cdot x^2$	$7 \cdot x^3$	$7 \cdot x^4$	$7 \cdot x^5$	$7 \cdot x^6$

1 Les monômes

A Définitions

- Un monôme est le produit d'un réel, appelé coefficient, par une partie littérale, produit de puissances, à exposants naturels, d'inconnues représentées par les lettres x, y, z, ...

- Le degré d'un monôme par rapport à une inconnue est l'exposant de cette inconnue.

  Exemples : $5x^2y^3$ est un monôme en x et y, 5 est le coefficient (partie numérique) et x^2y^3 est la partie littérale dont x et y sont les inconnues. C'est un monôme du deuxième degré par rapport à x et du troisième degré par rapport à y.
- Des monômes semblables sont des monômes ayant même partie littérale.

  Exemples : $5x^2y^3$, $-x^2y^3$ et $10y^3x^2$ sont des monômes semblables.

2 Les polynômes

A Définitions

Un polynôme est une somme de monômes.
Exemple : $5x^4y^3 - 3x^2$

B Remarques :

- Un polynôme en une seule variable est une somme de monômes en cette variable.
- Tout monôme est un polynôme.
- Un polynôme est dit réduit lorsqu'il ne comporte plus de monômes semblables.
- Un binôme est un polynôme réduit comprenant deux termes. Un trinôme est un polynôme réduit comprenant trois termes. Un quadrinôme est un polynôme réduit comprenant quatre termes.
- Le degré d'un polynôme réduit est le plus grand exposant de la variable dans ce polynôme.
- Un polynôme est dit ordonné par rapport aux puissances décroissantes (croissantes) de la variable si les exposants des puissances de cette variable sont placés en ordre décroissant (croissant).
- Un polynôme réduit de degré n est complet lorsque la variable y figure à toutes les puissances égales ou inférieures à n y compris le terme de degré 0 en la variable, appelé le terme indépendant de la variable.

C Valeur numérique d'un polynôme

Un polynôme en x est généralement noté : $P(x) = ...$, $R(x) = ...$ Pour chaque valeur numérique de la variable, le polynôme désigne un et un seul nombre réel.
La valeur numérique de $P(x)$ pour $x = a$ est notée $P(a)$ et appelée la valeur du polynôme lorsque l'on remplace x par a et que l'on réduit l'expression obtenue.
Exemple : $P(x) = 3x^2 - 5x + 3$ et $P(2) = 3.2^2 - 5.2 + 3 = 5$

3 Opérations sur les polynômes

Remarque préliminaire : d'une manière générale, on appliquera les règles connues du calcul dans $\mathbb{R}$, puisque chaque polynôme est une écriture littérale de réels.

A Egalité de deux polynômes

Deux polynômes réduits sont égaux si et seulement si les termes de même degré ont des coefficients égaux.

B Addition

*Règle :*On applique l' associativité et la commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$ et on additionne les termes semblables.

Exemple : $(2x^3+3x^2-5)+(5x^2-5x+l) = 2x^3+(3x^2+5x^2)-5x+(-5+1) = 2x^3+8x^2-5x-4$

C Soustraction

*Règle :*On applique la propriété : "*l'opposé d'une somme de réels égale la somme des opposés*" (c'est-à-dire enlever les parenthèses en changeant les signes de chaque terme du polynôme à soustraire) et on procède ensuite comme pour la somme.

Exemple : $(2x^3+3x^2-5)-(5x^2-5x+l) = 2x^3+3x^2-5-5x^2+5x-l = 2x^3+3x^2-5x^2+5x-5-1 = 2x^3-2x^2+5x-6$

D Multiplication

Règle : On applique les propriétés du produit : multiplier les coefficients et ensuite les termes littéraux, on applique ensuite la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$ et on additionne ensuite les termes semblables .

Exemple : $(2x^3+3x^2-5)(x+2) = 2x^4+3x^3-5x+4x^3+6x^2-10 = 2x^4+7x^3+6x^2-5x-10$

4 Division d'un polynôme par un polynôme

A La division euclidienne des polynômes

Définition :Effectuer la division euclidienne du polynôme $A(x)$ par le polynôme $D(x)$, c'est déterminer les polynômes quotient $Q(x)$ et reste $R(x)$ tels que

$$A(x) = D(x).Q(x) + R(x)$$

Le polynôme $A(x)$ est appelé le polynôme ***dividende***. Le polynôme D(x) est appelé le polynôme ***diviseur***. *Remarques :*

- les degrés de ces polynômes répondent à l'égalité suivante : $d^\circ A(x) = d^\circ D(x) + d^\circ Q(x)$

– si $A(x) = D(x).Q(x)$, on dit que le polynôme $A(x)$ est divisible par le polynôme $D(x)$; dans ce cas, $R(x) = 0$.

Disposition La méthode pratique de division d'un polynôme par un polynôme est basée sur celle de la division écrite d'un nombre par un nombre.
Pour diviser un polynôme $A(x)$ par un polynôme $D(x)$:
– on réduit et on ordonne par ordre décroissant des puissances de la variable, les deux polynômes
– on complète le polynôme $A(x)$
– on effectue la division et on arrête lorsque le reste a un degré inférieur à celui de $D(x)$.

Exemple : On cherche à diviser $x^2 - 5x + 3$ par $x - 2$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x + 3 & x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2 + 2x \quad\;\;} & x - 3 \\ -3x + 3 & \\ \underline{3x - 6} & \\ \text{-3} & \end{array}$$

B Division d'un par un binôme de la forme $(x - a)$

Quand on divise un polynôme $A(x)$ par un binôme de la forme $(x-a)$, on sait que $d°D(x) = 1$, $d°R(x) = 0$ et $d°Q(x) = d°A(x) - 1$ avec

$$A(x) = (x - a).Q(x) + r$$

puisque $R(x)$ est constant on le note alors r. Pour déterminer le quotient et le reste de cette division par $(x - a)$,deux méthodes peuvent s'utiliser.

a Première méthode : méthode de la division euclidienne

On utilise donc la disposition pratique de la division générale de deux polynômes (voir **??**)

b Deuxième méthode : méthode de Horner

La recherche du quotient d'un polynôme par $(x-a)$ peut se faire par la méthode dite de Horner[1] .

Exemple : On cherche à diviser x^2-5x+3 par $x-2$

	1	-5	3
2		2	-6
	1	-3	-3

On obtient donc $(x^2-5x+3)=(x-2).(x-3)-3$
Remarque : Avant de noter les coefficients de $A(x)$ dans le tableau, il ne faut pas oublier de l'ordonner et de le compléter si nécessaire par des termes de coefficients nuls.
Exemple $(x^4-3x^3+2x+5):(x-2)=(x^4-3x^3+0x^2+2x+5):(x-2)$ et donc

C La loi du reste

Le reste de la division d'un polynôme $A(x)$ par un binôme de la forme $(x-a)$ est la valeur numérique de ce polynôme pour $x=a$.
On a donc : $r=A(a)$
Un polynôme $A(x)$ est divisible par un binôme de la forme $(x-a)$ si le reste de la division de $A(x)$ par $(x-a)$ est nul c'est-à-dire si la valeur numérique de $A(x)$ pour $x=a$ est nulle ou $A(a)=0$

5 Factorisation

A Définition

Factoriser une somme, c'est la transformer en un produit de facteur.

B Méthodes

Nous rappelons ici les prinicipales méthodes vues en 3ème. Elles seront illustrées au cours oral.

- ✓ Mise en évidence simple : orsque tous les termes d'un polynôme ont un facteur commun, on commence toujours par mettre ce facteur commun en évidence ;
- ✓ Mise en évidence double : après une mise en évidence dans chaque groupe, apparaît un facteur commun qui peut, à son tour, être mis en évidence ;
- ✓ Factorisation et produits remarquables
  - Binôme :$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ et $a^3+b^3=(a+b)(a^2+ab+b^2)$[2]
  - Trinôme : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ et $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
    Remarque : il faut toujours vérifier que le double produit soit présent dans cette somme (différence).
  - Quadrinôme cube parfait : $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ et $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$[3]
- ✓ Méthode de groupement

[1] William Georges Horner, mathématicien anglais, 1786- 1837
[2] On démontre ces formules en développant complètement, par double distributivité, les seconds membres
[3] On démontre ces formules en observant que $(a)^3=(a)^2.(a)$

– Groupement deux à deux
– Groupement de trois termes d'un quadrinôme : ces trois termes forment un trinôme carré parfait et ce trinôme carré parfait forme, avec le quatrième, terme une différence de deux carrés.

C Méthode des diviseurs binômes (méthode dite du désespoir ! !)

Rappels :

– *Loi du reste* : le reste de la division d'un polynôme $A(x)$ par un binôme de la forme $(x - a)$ est la valeur numérique de ce polynôme pour $x = a$
– Un polynôme $A(x)$ est divisible par un binôme de la forme $(x - a)$ si le reste de la division de $A(x)$ par $(x - a)$ est nul c'est-à-dire si la valeur numérique de $A(x)$ pour $x = a$ est nulle ou $A(a) = 0$
– Si un polynôme $A(x)$ est divisible par un binôme de la forme $(x - a)$, alors il pourra s'écrire sous la forme d'un produit du type $(x - a).Q(x)$
– Pour factoriser un polynôme $A(x)$, on peut rechercher un facteur de la forme $(x - a)$ par lequel il est divisible. Dans ce cas, le nombre a est nécessairement diviseur du terme indépendant de $A(x)$.

Exemples de factorisation par la méthode des diviseurs binômes :

a) polynôme à factoriser. recherche des diviseurs du terme indépendant : div 6 = 1,-1,2,-2,3,-3,6,-6 b) recherche du diviseur de la forme (x-a) par la loi du reste. et donc (x-1) divise le polynôme P(x) division par la grille de Horner ,